ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

TẠ THỊ HỒNG THỨC

HÀM TĂNG CHẬM VÀ DÃY SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành:	**Phương pháp toán sơ cấp**
Mã số:	**8 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên, 2020

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với TS. Ngô Văn Định, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên em trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các quý thầy cô khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã trực tiếp giảng dạy lớp cao học Toán K12b.

Em cũng xin cảm ơn đến các bạn học viên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ em trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Em mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Mục lục

Mở đầu 3

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị 5

1.1. Dãy số và giới hạn dãy số 5

1.2. Hàm số và giới hạn hàm số 7

1.3. Tính liên tục và đạo hàm của hàm số 8

1.4. Vô cùng bé và vô cùng lớn 10

Chương 2. Hàm tăng chậm và dãy số 13

2.1. Định nghĩa và ví dụ 13

2.2. Tính chất của hàm tăng chậm 13

2.3. Hàm tăng chậm có đạo hàm giảm 20

2.4. Hàm tăng chậm và dãy số trung bình nhân 31

Chương 3. Hàm α-tăng chậm 35

3.1. Định nghĩa và ví dụ 35

3.2. Tính chất 36

Kết luận 41

Tài liệu tham khảo 42

Mở đầu

Cho $f(x)$ là một hàm số xác định trên khoảng $[a, \infty)$ thỏa mãn $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ và đạo hàm liên tục $f'(x) > 0$. Hàm số $f(x)$ được gọi là *tăng chậm* nếu thỏa mãn điều

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = 0.$$

Một trong những ví dụ đầu tiên về hàm tăng chậm là hàm số $f(x) = \log x$. Khái niệm về hàm tăng chậm được Jakimczuk định nghĩa năm 2010 trong bài báo "Functions of slow increase and integer sequences" xuất bản trên tạp chí *Journal of Integer sequence.* Trong bài báo này, ông đã chứng minh một số tính chất của các hàm tăng chậm và áp dụng các tính chất của hàm tăng chậm nghiên cứu một số bài toán về dãy số. Các kết quả này tiếp tục được ông phát triển và công bố một số kết quả trong bài báo "Integer sequences, functions of slow increase, and the Bell numbers" xuất bản năm 2011. Sau đó, các hàm tăng chậm được nhiều nhà toán học khác tiếp tục nghiên cứu. Năm 2012, Shang [4] đã mở rộng khái niệm hàm tăng chậm để định nghĩa và nghiên cứu về các hàm α-tăng chậm, đồng thời nghiên cứu một số áp dụng tính chất của các hàm α-tăng chậm để nghiên cứu một số dãy số.

Mục tiêu của đề tài là trình bày lại các kết quả nói trên về hàm tăng chậm và về hàm α-tăng chậm. Trước khi trình bày lại các kết quả này, luận văn nhắc lại một cách sơ lược một số kiến thức về dãy số thực, giới hạn của dãy số thực, giới hạn của hàm số một biến số thực.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận văn được trình bày thành 3 chương. Trong chương 1, luận văn trình bày lại một số kiến thức về dãy số, giới hạn dãy số, giới hạn của hàm số một biến số thực, đạo hàm, đại lượng vô cùng bé, đại lượng vô cùng lớn. Các nội dung này được sử dụng cho các chương sau của luận văn. Chương 2 của luận văn trình bày khái niệm của hàm tăng chậm, một số kết quả của các hàm tăng chậm và áp dụng vào nghiên cứu một số dãy số nguyên. Nội dung của chương 2 được tham khảo từ hai bài báo [2] và [3] của Jakimczuk. Dựa vào bài báo [4] của Shang, luận văn trình bày trong chương 3 khái niệm và tính chất của các hàm α-tăng chậm, cũng như một số áp dụng của các hàm số này vào nghiên cứu dãy số.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Dãy số và giới hạn dãy số

Một dãy số trong $X \subset \mathbb{R}$ là bộ vô hạn có thứ tự các số trong X

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_0, x_1, x_2, x_3, ...$$

Nói một cách khác, một dãy trong X là một ánh xạ

$$x : \mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n = x(n).$$

Có nhiều cách khác nhau để mô tả một dãy số như liệt kê các phần tử, thông qua biểu thức xác định của dãy, thông qua biểu thức đệ quy,...

Định nghĩa 1.1.1. Giá trị $a \in \mathbb{R}$ được gọi là *giới hạn của dãy số* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ bé tùy ý, đều tìm được số tự nhiên N_ϵ đủ lớn (phụ thuộc ϵ), sao cho khi $n > N_\epsilon$ thì $|x_n - a| < \epsilon$. Khi đó ta nói dãy (x_n) hội tụ về a và ký hiệu là

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ hay } \lim x_n = a \text{ hay } x_n \to a, \text{ khi } n \to \infty.$$

Dưới đây là một vài tính chất cơ bản của giới hạn của dãy số:

- Định nghĩa giới hạn của dãy không phụ thuộc vào hữu hạn số hạng đầu của dãy.

- Dễ thấy: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.
- Nếu (x_n) hội tụ, thì giới hạn là duy nhất. Thực vậy, nếu a và b cùng là giới hạn của (x_n), thì $|a - b| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| \to 0$, khi $n \to \infty$. Vậy $|a - b| = 0$ hay $a = b$.

Định nghĩa 1.1.2. Dãy số (x_n) được gọi là có *giới hạn dương vô cùng*, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, nếu với mọi $E > 0$ lớn tùy ý, tồn tại số tự nhiên N_E đủ lớn sao cho $x_n > E$, với mọi $n > N_E$.

Dãy số (x_n) được gọi là có *giới hạn âm vô cùng*, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, nếu với mọi $E > 0$ lớn tùy ý, tồn tại số tự nhiên N_E đủ lớn sao cho $x_n < -E$, với mọi $n > N_E$.

Nếu dãy số (x_n) có giới hạn dương vô cùng hoặc âm vô cùng thì ta nói (x_n) là *dãy phân kỳ*.

Dưới đây là một số tính chất của giới hạn dãy số thường được sử dụng trong tính toán.

Mệnh đề 1.1.3 (Tính bị chặn)**.** *Nếu (x_n) hội tụ thì tồn tại $M >$ sao cho $|x_n| < M, \forall n$.*

Mệnh đề 1.1.4 (Tính bảo toàn qua các phép toán)**.** *Giả sử (x_n) và (y_n) là các dãy hội tụ. Khi đó các dãy $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$, $(\dfrac{x_n}{y_n})$ (giả thiết thêm $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$) hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.*

Mệnh đề 1.1.5 (Tính bảo toàn thứ tự)**.** *Giả sử (x_n) và (y_n) là dãy hội tụ và với mọi n đủ lớn $x_n \leqslant y_n$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Mệnh đề 1.1.6 (Tính chất kẹp giữa)**.** *Giả sử với mọi n đủ lớn ta có $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.*

1.2. Hàm số và giới hạn hàm số

Một hàm số một biến số thực là một ánh xạ

$$f : X \to Y, x \mapsto y = f(x)$$

trong đó X, Y là các tập con của $\mathbb{R}$. Tập X gọi là *miền xác định* của f. Tập $f(X) = \{y \in \mathrm{R} : \exists x \in X, y = f(x)\}$ gọi là *miền giá trị* của f.

Cho $f, g : X \to \mathbb{R}$ là hai hàm số xác định trên tập X. Khi đó có thể định nghĩa các hàm $f \pm g, fg, \dfrac{f}{g}$ (nếu $g(x) \neq 0, \forall x \in X$) một cách tự nhiên như sau

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), fg(x) = f(x)g(x), \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in X.$$

Cho $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là hai hàm số. Khi đó hàm hợp $g \circ f : X \to Z$ định nghĩa là $g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in X$.

Định nghĩa 1.2.1 (Tính đơn điệu)**.** Cho f là một hàm số xác định trên tập X. Hàm f gọi là *tăng* (tương ứng *tăng ngặt*) trên X nếu $x_1, x_2 \in X$ thì $x_1 < x_2$ kéo theo $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) < f(x_2)$).

Hàm f gọi là *giảm* (tương ứng *giảm ngặt*) trên X nếu $x_1, x_2 \in X$ thì $x_1 < x_2$ kéo theo $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) > f(x_2)$).

Định nghĩa 1.2.2 (Điểm tụ)**.** Một điểm x là điểm tụ của tập hợp A khi và chỉ khi mỗi lân cận của x có chứa ít nhất một điểm của A khác với x.

$$x \text{ là một điểm tụ của A} \Leftrightarrow \forall r > 0, \exists a \in A : 0 < d(x, a) < r.$$

Định nghĩa 1.2.3 (Giới hạn)**.** Cho hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ và a là điểm tụ của X. Hàm f gọi là *có giới hạn* $L \in \mathbb{R}$ *khi* x *tiến tới* a nếu với mọi $\epsilon > 0$ bé tùy ý, tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $x \in X$ mà $0 < |x - a| < \delta$, thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$, khi $x \to a$.

Dưới đây là một vài tính chất cơ bản của giới hạn hàm số.

Cho $f, g, \varphi : X \to \mathbb{R}$ là ba hàm số xác định trên X và a là điểm tụ của X. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Khi đó:

- Ta có
$$\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = L \pm M,$$
$$\lim_{x\to a} fg(x) = LM,$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{L}{M}\,(M \neq 0).$$
- Nếu giả thiết thêm $f(x) \leqslant g(x)$ với mọi x ở một lân cận của a, thì $L \leqslant M$.
- Nếu giả thiết thêm $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x)$ với mọi x ở một lân cận của a và $L = M$, thì $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = L$.
- Nếu hàm hợp $g \circ f$ tồn tại và nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{y\to L} g(y) = A$ thì $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = A$.

Có thể mở rộng các khái niệm giới hạn trên khi $a = \pm\infty$ hay $L = \pm\infty$. Ta có các định nghĩa sau:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > E, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta,$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > -E, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists R > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in X, x > R,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists R > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in X, x < -R.$$

1.3. Tính liên tục và đạo hàm của hàm số

Định nghĩa 1.3.1. Cho f là hàm xác định trên một tập X chứa a. Hàm f gọi là *liên tục tại* a nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Lưu ý rằng nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại a thì với mọi dãy (x_n) trong X mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Tổng, hiệu, tích, thương (với điều kiện mẫu khác 0) của các hàm liên tục tại a là hàm liên tục tại a. Nếu f liên tục tại a và g liên tục tại $f(a)$ thì hàm hợp $g \circ f$ liên tục tại a.

Định nghĩa 1.3.2. Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tồn tại thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm* của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu $f'(x_0)$. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng $(a; b)$ thì ta có một hàm số trên khoảng $(a; b)$, gọi là đạo hàm của hàm số f trên khoảng $(a; b)$, ký hiệu f' hoặc đôi khi được ký hiệu $\dfrac{d}{dx} f$.

Dưới đây là một số tính chất của đạo hàm:

- Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại đó.
- Nếu các hàm số u và v có đạo hàm tại x thì các hàm số $u + v$ và uv có đạo hàm tại x và ta có

  $$(u + v)' = u' + v', \ (uv)' = u'v + uv'.$$

  Nếu có thêm $v'(x) \neq 0$ thì hàm số $\dfrac{u}{v}$ có đạo hàm tại x và

  $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

- Nếu hàm f có đạo hàm tại x và hàm số g có đạo hàm tại $y = f(x)$ thì hàm số hợp $g \circ f$ có đạo hàm tại x và

  $$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Định lý 1.3.3 (Định lý giá trị trung bình của Lagrange)**.** *Nếu f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$